Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,
U. de Guanajuato
Tarea 2 de Álgebra Lineal II: vectores y valores propios.
lunes 10 de septiembre de 2012
Fecha de entrega: lunes 17 de septiembre de 2012.

1. Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

   a) Determine todos los valores propios de A.

   b) Para cada valor propio λ de A, encuentre una base del subespacio $E_\lambda = \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)$. Al subespacio E_λ se le llama el espacio propio asociado a λ.

   c) Si es posible, encuentre $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que la matriz $Q^{-1}AQ$ sea diagonal.

2. Para cada uno de los siguientes endomorfismos lineales $T : E \longrightarrow E$ examine si T es diagonalizable. En los casos en que lo sea, encuentre una base β de E formada por vectores propios de T.

   a) $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ definida por $T(f)(x) = f(0) + f(1)(x + x^2)$, donde $P_2(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de polinomios sobre el campo $\mathbb{R}$ de grado no mayor a 2.

   b) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ definida por $T(A) = A^t$.

3. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathrm{End}(E)$. Demuestra que si $p_T(x) \in \mathbb{K}[x]$ es el polinomio característico de T y T es diagonalizable, entonces $p_T(T) = T_0$, el operador lineal cero.

4. Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Demostrar que si f y $g \in \mathrm{End}(E)$ conmutan, entonces, para cada valor propio λ de g (respectivamente, μ, de f), el subespacio E_λ es invariante por f (respectivamente, E_μ es invariante por g).